Раздел 2. Элементы математической логики

Тема 2.1. Логические операции. Формулы алгебры высказываний

Тема лекции «Понятие высказывания. Основные логические операции»

1. ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Исходным понятием математической логики является «высказывание».

Определение: Под *высказыванием* понимают повествовательное которое может быть либо истинным, либо ложным.

В математической логике не рассматривается сам смысл высказываний, определяется только его истинность или ложность, что принято обозначать соответственно И или Л.

Определение: Значения И и Л (или 1 и 0) называются *истинностными значениями* высказывания, множество {И, Л} (или {0,1}) называется множеством истинностных значений.

Заметим, что значение высказывания ситуативно, при этом в каждой ситуации высказывание принимает одно и только одно из двух значений – И или Л.

Например, повествовательное предложение «3 есть простое число» является истинным, а «3.14… – рациональное число» – ложным, «Колумб открыл Америку» – истинным, а «Киев – столица Узбекистана» – ложным, «Число 6 делится на 3» – истинным, а «Сумма чисел 2 и 3 равна 6» – ложным и т. п.

Такие высказывания называют простыми или элементарными. При формальном исследовании сложных текстов вместо понятия «простые высказывания» используют понятие «*пропозициональные переменные*» (от лат. propositio – предложение), которые обозначают прописными буквами латинского алфавита A, B, C,… Истинность или ложность высказывания будем отмечать символами 1 – истина или 0 – ложь.

Пример:

1) если A_1=«3 – простое число», то $A_1 = 1$;
2) если A_2=«3 – вещественное число», то $A_2 = 1$;
3) если B_1=«3, 14…– рациональное число», то $B_1 = 0$;
4) если D=«Киев – столица Узбекистана», то $D = 0$.

Замечание. Символ «=» означает, что пропозициональной переменной, стоящей слева, присвоить значение высказывания, стоящего справа от символа.

Правила построения сложных высказываний в виде последовательности пропозициональных переменных, логических связок и вспомогательных символов определяют возможность формального описания любого текста. При формальной записи сложного высказывания всегда нужно исходить из его содержания. До тех пор пока не определена логическая структура сложного высказывания, его нельзя формально описывать.

Правила выполнения логических операций над сложными высказываниями на основе заданных логических связок и пропозициональных переменных формирует алгебру высказываний.

Правила вывода новых высказываний, основанные на известных отношениях между заданными пропозициональным переменными, формируют исчисление высказываний. Высказывания, из которых делают вывод новых высказываний, называют *посылками*, а получаемое высказывание – *заключением*.

2.Операции над высказываниями

Условимся считать высказывание *элементарным (простым)*, если никакую его часть нельзя рассматривать как отдельное высказывание. Для образования *составных (сложных) высказываний* используют *логические связки (логические операции).*

Пусть X и Y – два высказывания.

Определим основные логические операции.

Отрицанием высказывания X называется высказывание $\overline{X}$, которое истинно тогда и только тогда, когда X ложно. В разговорной речи высказывание $\overline{X}$ соответствует составлению из высказывания X нового высказывания «не X» или «неверно, что X». Для обозначения отрицания высказывания также используют запись $\neg X$ ($\rceil X$).

Конъюнкцией двух высказываний X и Y называется высказывание $X \wedge Y$, которое истинно тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания. Конъюнкция иначе называется логическим умножением, а X и Y – сомножителями. В разговорной речи конъюнкция соответствует соединительному союзу «и», $X \wedge Y$ – читается как «X и Y». Для обозначения конъюнкции высказываний также используют запись $X\&Y$.

Дизъюнкцией двух высказываний X и Y называется высказывание $X \vee Y$, которое ложно тогда и только тогда, когда X и Y ложны. Дизъюнкция иначе называется логическим сложением, а X и Y – слагаемыми. В разговорной речи дизъюнкция соответствует соединительному союзу «или», $X \vee Y$ – читается как «X или Y».

Замечание. Следует обратить внимание, что в повседневной речи союз «или» употребляется в двух смыслах: «исключающее или», когда истинность составного высказывания определяется истинностью только одного из высказываний, и «не исключающее или», когда истинность составного высказывания определяется истинностью хотя бы одного из высказываний. «Исключающее или» не является операций дизъюнкцией.

Импликацией двух высказываний X и Y называется высказывание $X \rightarrow Y$, которое ложно тогда и только тогда, когда X – истинно, а Y – ложно. В разговорной речи импликация высказываний соответствует составлению высказывания вида: «X имплицирует Y», «из X следует Y», «если X, то Y», «X достаточно для Y», «X только тогда, когда Y», «Y необходимо для X», «Y тогда, когда X». В обозначении $X \rightarrow Y$ X – посылка, Y – заключение.

Употребление в повседневной речи слов «если…, то…» несколько отличается от использования их в математической логике. Так в повседневной речи, если высказывание X ложно, то сложное высказывание $X \rightarrow Y$ вообще не имеет смысла. В математической логике при ложном высказывании X значение сложного высказывания (импликации) всегда истинно.

Пример. Пусть даны высказывания А=«по проводнику протекает электрический ток» и В = «вокруг проводника есть магнитное поле». Тогда формула $A \rightarrow B$ отражает высказывание «если по проводнику протекает электрический ток, то вокруг проводника возникает магнитное поле».

Эквиваленцией двух высказываний X и Y называется высказывание $X \leftrightarrow Y$, которое истинно тогда и только тогда, когда истинные значения высказываний X и Y совпадают. В разговорной речи эквиваленция двух высказываний соответствует составлению нового высказывания вида «X эквивалентно Y», «X тогда и только тогда, когда Y», «X необходимо и достаточно для Y».

Примеры.

1. Пусть даны высказывания A=«быть четным числом» и B=«число делится на два». Тогда формула $F=(A \leftrightarrow B)$ отображает высказывание «для того, чтобы число было четным необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на два».

2. Если высказывание «3 – вещественное или целое число», то высказывание $A_1 \vee A_2 = 1$;

3. Если высказывание «3,14… – рациональное число», то высказывания $B_1=0$ или $\overline{B_1} = 1$;

4. Если высказывание «3 есть простое число тогда и только тогда, когда оно целое», то высказывание $A_1 \leftrightarrow A_2 = 1$.

Обозначения элементарных высказываний A_1, A_2, B_1 взяты из первого примера.

Правила построения сложных высказываний в виде последовательности пропозициональных переменных, логических связок и вспомогательных символов определяют возможность формального описания любого текста. При формальной записи сложного высказывания всегда нужно исходить из его содержания. До тех пор пока не определена логическая структура сложного высказывания, его нельзя формально описывать.

Правила выполнения логических операций над сложными высказываниями на основе заданных логических связок и пропозициональных переменных формирует алгебру высказываний.

Всякое сложное высказывание, составленное из некоторых исходных высказываний посредством применения логических операций $\bar{\ }$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, будем называть формулой алгебры высказываний. Исходные высказывания при этом могут быть постоянными, то есть иметь определенное значение И или Л, или могут не иметь определенного значения. В первом случае исходные высказывания будем называть *постоянными элементарными высказываниями*, во втором – *переменными элементарными высказываниями.* Переменные элементарные высказывания будем обозначать заглавными буквами латинского алфавита.

При вычислении по формуле учитывается приоритет операций

$$\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow \textit{или} \leftrightarrow$$

При необходимости изменить естественную последовательность действий используют скобки.

Символы, соответствующие переменным элементарным высказываниям, называются *пропозициональными переменными.*

Пропозициональной формулой (*ПФ*) называется выражение, построенное из пропозициональных переменных с помощью логических связок $\bar{\ },\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow$ (и, возможно, некоторых других) по следующим правилам:

1) каждая пропозициональная переменная есть ПФ;

2) если X и Y – ПФ, то $\overline{X}$, $X\wedge Y$, $X\vee Y$, $X\rightarrow Y$, $X\leftrightarrow Y$ – тоже ПФ.

Если даны формулы $F_1, F_2,\ldots F_n$, то истинное значение формулы $F=F_1\wedge F_2\wedge\ldots\wedge F_n$ определяется истинностью всех формул $F_1, F_2,\ldots F_n$.

Пример. Пусть даны высказывания A=«компьютер содержит микропроцессор», B=«компьютер содержит оперативную память», C=«компьютер содержит контроллеры»; D=«компьютер содержит порты ввода–вывода». Тогда формула $F=A\wedge B\wedge C\wedge D$ отражает высказывание «компьютер содержит микропроцессор, оперативную память, контроллеры и порты ввода-вывода»

Если даны формулы $F_1, F_2,\ldots F_n$, то истинностное значение формулы $F=F_1\vee F_2\vee\ldots\vee F_n$ определяется истинностью хотя бы одной формулы $F_1, F_2,\ldots$ или F_n.

Пример. Пусть даны высказывания S=«полная система функций математической логики», A=«система функций содержит хотя бы одну нелинейную функцию», B=«система функций содержит хотя бы одну немонотонную функцию», C=«система функций содержит хотя бы одну не самодвойственную функцию», D=«система функций содержит хотя бы одну функцию, не сохраняющую 0», E=«система функций содержит хотя бы одну функцию, не сохраняющую 1». Тогда формула $F=S\leftrightarrow(A\wedge B\wedge C\wedge D\wedge E)$ отражает сложное высказывание «для того чтобы система функций математической логики была полной, необходимо и достаточно, чтобы она содержала хотя бы по одной нелинейную, немонотонную и не самодвойственную функции, а также функции, не сохраняющие 0 и 1».

Тема лекции «Таблица истинности»

Таблицы истинности

Каждая пропозициональная переменная принимает значения 0 (Л) или 1 (И), тогда ПФ (пропозиционная формула) в соответствии с определением логических операций также принимает значения 0 (Л) или 1 (И).

Каждой ПФ можно поставить в соответствие таблицу, называемую *таблицей истинности*, в которой перечислены все возможные значения входящих в нее переменных и значения ПФ на этих наборах.

Таблица истинности логической формулы выражает соответствие между всевозможными наборами значений переменных и значениями формулы.

Если формула содержит n переменных, то таблица истинности содержит 2^n наборов значений переменных.

С помощью таблицы истинности определяются все логические операции над высказываниями: (*вспомним определения логических операций и составим по ним таблицу истинности*)

X	Y	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	$X \wedge Y$	$X \vee Y$	$X \rightarrow Y$	$X \leftrightarrow Y$
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1

Пример. Построить таблицу истинности ПФ $\left(\overline{X} \rightarrow Y\right) \wedge \overline{X} \wedge \overline{Y}$.

X	Y	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	$\overline{X} \rightarrow Y$	$\left(\overline{X} \rightarrow Y\right) \wedge \overline{X} \wedge \overline{Y}$
0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0
1	1	0	0	1	0

Пример. Построить таблицу истинности $(A \vee B) \rightarrow \neg B$

A	B	$\neg B$	$A \vee B$	$(A \vee B) \rightarrow \neg B$
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0

Пример. Построить таблицу истинности $A \vee \neg B \wedge C$

A	B	C	$\neg B$	$\neg B \wedge C$	$A \vee \neg B \wedge C$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1
1	1	1	0	0	1

Пример. Построить таблицу истинности $\neg(A \wedge B \vee \neg C)$

A	B	C	$\neg C$	$A \wedge B$	$A \wedge B \vee \neg C$	$\neg(A \wedge B \vee \neg C)$
0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1	0
1	1	1	0	1	1	0

Пример: Построим истинностную таблицу сложного высказывания:
S=(A→B)∧(˥C)∨(A↔C)

Очевидно, истинностная таблица будет содержать $2^3 = 8$ строк.

Скобки применяются, если нарушаются естественный порядок операций: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, двойная импликация. Скобки (A→B) указывают на то, что сначала нужно выполнить
импликацию, затем найти (A→B)∧C. Скобки в выражении (A↔C) можно опустить. Заключительной операцией в построении истинностной таблицы для S будет дизъюнкция двух высказываний: (A→B)∧C и (A↔C).

A	B	C	A→B	(A→B)∧C	˥C	A↔C	C (A↔C)	S
1	1	1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	1	0	0
1	0	1	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1	0	1
0	0	0	1	0	1	0	1	1

Итак, формула S задает высказывание которое истинно на следующих наборах значений элементарных высказываний:
A=1 B=1 C=1 (все три элементарных высказывания истинны)
A=1 B=0 C=1 (A, C - истинны, B - ложно)
A=0 B=1 C=1 (A - ложно, B и C - истинны)
A=0 B=1 C=0 (B - истинно, A и C - ложны)
A=0 B=0 C=1 (C - истинно, A и B - ложно)
A=0 B=0 C=0 (все три высказывания ложны).

Пример: Рассуждение «если инвестиции на текущий год не изменятся (*A*), то возрастет расходная часть бюджета (*B*) или возникнет безработица (*C*), а если возрастет расходная часть бюджета, то налоги не будут снижены (*D*) и, наконец, если налоги не будут снижены и инвестиции не изменятся, то безработица не возникнет».

В этом рассуждении есть четыре повествовательных предложения, которые следует заменить пропозициональными переменными и формально описать суждение. Тогда формула сложного рассуждения имеет вид:

$$F = (A \to (B \vee C)) \wedge (B \to D) \wedge ((D \wedge A) \to \overline{C}).$$

Для различных значений истинности пропозициональных переменных и подформул, построенных на логических связках, можно последовательно определить значение истинности формулы F. Ниже представлена таблица истинности для этого рассуждения.

A	B	C	D	˥C	4∧1	2∨3	1→7	2→4	6→5	8∧9	11∧10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1

A	B	C	D	$\neg C$	$4\wedge 1$	$2\vee 3$	$1\to 7$	$2\to 4$	$6\to 5$	$8\wedge 9$	$11\wedge 10$
0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0

Для удобства записи любой подформулы и формулы каждый столбец пронумерован и логические операции выполняются с индексами столбцов.

Тема лекции «Формулы логики»

1. Формулы логики

Формула алгебры логики определяется следующим образом (индуктивное определение):

- Любая логическая переменная есть формула.
- Если A и B – формулы, то $\overline{A}, \overline{B}, A\wedge B, A\vee B, A\to B, A\leftrightarrow B,$ – тоже формулы (допустимы все логические связки).
- Других формул нет.

Подформулой формулы A называется любое подслово слова A, которое само является формулой.

Для сокращения записи формул обычно принимаются следующие соглашения:

- если часть формулы заключена в скобки, то сначала производится действие в скобках,
- если над частью формулы стоит знак отрицания, то он заменяет собой скобки, в которые заключена эта часть формулы.

Принят следующий порядок выполнения операций:

- Отрицание
- конъюнкция,
- дизъюнкция,
- импликация и эквивалентность в порядке их записи,

Формула называется тождественно истинной или тавтологией, если она реализует

Формула называется *тождественно истинной, общезначимой или тавтологией*, если она принимает значение 1 на всех наборах значений переменных. Для обозначения того, что ПФ F есть тавтология используют запись $\vdash$F.

Формула называется *тождественно ложной или противоречием*, если она принимает значение 0 на всех наборах значений переменных.

Формула называется *выполнимой или опровержимой*, если на некоторых наборах значений переменных она принимает значение 1, а на остальных – 0.

Тип формулы можно определить с помощью таблицы истинности.

Пример. Определить тип ПФ $(\overline{X} \to Y) \wedge \overline{X} \wedge \overline{Y}$. Для определения типа ПФ составим таблицу истинности

X	Y	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	$\overline{X} \to Y$	$(\overline{X} \to Y) \wedge \overline{X} \wedge \overline{Y}$
0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0
1	1	0	0	1	0

Как видно из таблицы истинности, данная ПФ является тождественно ложной, так как принимает значение 0 на всех наборах переменных.