Тема лекции «Понятие множества. Теоретико-множественные диаграммы»

Основы теории множеств

Множеством называется совокупность каких-либо объектов, обладающим общим для всех характеристическим свойством. Это определение нельзя считать строгим, так как понятие множества является исходным понятием математики и не может быть определено через другие математические объекты. Один из основателей теории множеств Г. Кантор определял множество так: "Множество есть многое, мыслимое как целое".

Множество – это неопределяемое понятие, которое задается перечислением предметов, входящих (составляющих) в него, либо их свойствами.

Всякое множество состоит из элементов. Объекты, сущности или элементы, составляющие множество, обозначаются строчными латинскими буквами: a, b, m, x, y …; множество часто обозначают прописными латинскими буквами A, B, M, X, У…. Знак $\in$ обозначает вхождение или принадлежность; $x \in E$ читается: «элемент x принадлежит множеству E», или короче: «x—элемент множества E». Следует различать «общий элемент» x множества E, т. е. произвольный элемент, характеризующийся единственным свойством «принадлежать множеству», и конкретные элементы a, b, c,..., каждый из которых отличен от остальных. Если x не принадлежит E, будем писать $x \notin E$, что читается «x не является элементом множества E» или «x не принадлежит множеству E».

Если каждый элемент множества A является элементом множества B, говорят, что множество A является подмножеством множества B, и записывают $A \subseteq B$ или $B \supseteq A$. Отметим, что по определению само множество A является своим подмножеством,

т.е. $A \subseteq A$.

Множество называется конечным, если оно одержит конечное число элементов. Все остальные множества называются бесконечными.

Также необходимо выделить пустые множества. Множества, не содержащие элементы, называются пустыми. Принято считать, что пустое множество является подмножеством любого множества, $\varnothing \subseteq A$, где A – любое множество. Таким образом, всякое множество содержит в качестве своих подмножеств пустое множество и само себя.

Существует два способа задания множества:

1) перечисление элементов (только для конечных множеств):
$M = \{m_1, m_2, m_3, ..., m_n\}$
2) указание свойств:
$M = \{x \ / \ P(x)\}$ - Множество М состоит из таких элементов x, обладающих свойством Р.

Пример:

1) $M = \{1,2,3,4,5\}$ - перечисление;
2) $M = \{x \ / \ x \in N, x \le 6\}$

Мощностью множества М называется число элементов в него входящих.

$M_2 = \{2,5,6\}$, $|H_2| = 3$, где M_2 – множество, H_2 – мощность множества;

Тема лекции «Операции над множествами»

1. Операции над множествами

Для получения новых множеств из уже существующих, используют операции над множествами. Рассмотрим основные из них.

Объединением множеств X и Y называется множество $X \bigcup Y$, все элементы которого являются элементами множества X или Y:

$$X \bigcup Y = \{x \mid \; x \in X \text{ или } x \in Y\}.$$

Пересечением множеств X и Y называется множество $X \bigcup Y$, элементы которого являются элементами обоих множеств X и Y:

$$X \bigcap Y = \{x \mid x \in X \text{ и } x \in Y\}.$$

Очевидно, что выполняются включения

$$X \bigcap Y \subseteq X \subseteq X \bigcup Y; \quad X \bigcap Y \subseteq Y \subseteq X \bigcup Y.$$

Разностью множеств X и Y называется множество $X \setminus Y$ всех тех элементов X, которые не принадлежат Y:

$$X \setminus Y = \{x \mid \; x \in X \text{ и } x \notin Y\}.$$

Дополнением множества X называется множество $\overline{X}$ всех тех элементов x, которые не принадлежат множеству X:

$$\overline{X} = U \setminus X.$$

Симметрической разностью **(или *кольцевой суммой*)** множества X и Y называется множество

$$X \oplus Y = (X \setminus Y) \bigcup (Y \setminus X).$$

Замечание. $X \setminus Y = X \bigcap \overline{Y}$.

Все основные операции над множествами можно проиллюстрировать на диаграмме Эйлера-Венна (рис. 1.1-1.5).

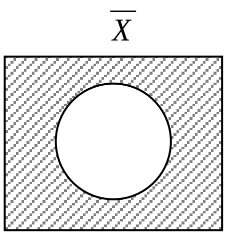


Рис. 1.1

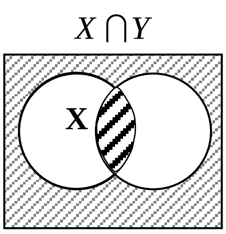


Рис. 1.2

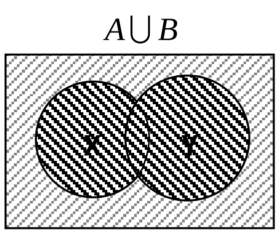


Рис. 1.3

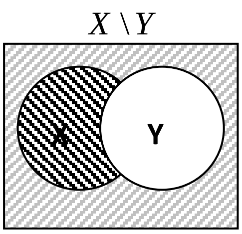


Рис.1.4

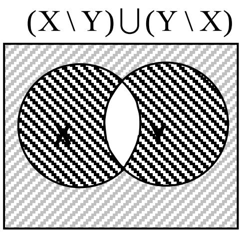


Рис. 1.5

Одним из важных понятий теории множеств является понятие декартова произведения множеств. ***Декартовым (прямым) произведением*** множеств X и Y называется множество упорядоченных пар вида

$$\mathrm{X}\times\mathrm{Y}=\{(x,y)|\ x\in\mathrm{X}\text{ и } y\in\mathrm{Y}\}.$$

Пример. Пусть X={1,2}, Y={3,4,5}. Тогда $\mathrm{X}\times\mathrm{Y}$={(1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5)}, $Y\times X$ ={(3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (5,1), (5,2)}, $X\times X$ ={(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)}.

Две пары (x,y) и (u,v) считаются равными тогда и только тогда, когда $x=u$ и $y=v$

Аналогично можно определить декартово произведение n множеств $\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2,.....,\mathrm{X}_n$:
$\mathrm{X}_1\times\mathrm{X}_2\times....\times\mathrm{X}_n=\{(x_1,x_2,...,x_n)|x_1\in\mathrm{X}_1,x_2\in\mathrm{X}_2,...,x_n\in\mathrm{X}_n\}.$

Если $\mathrm{X}_1=\mathrm{X}_2=...=\mathrm{X}_n=\mathrm{X}$, то n-я степень множества X определяется как $\mathrm{X}^n=\underbrace{\mathrm{X}\times\mathrm{X}\times....\times\mathrm{X}}_{n}.$

2.Мощность множества

1. Пусть заданы два конечных множества X и Y, причем $N(X)=|\mathrm{X}|$; $N(Y)=|\mathrm{Y}|$, тогда количество элементов в объединении двух множеств X и Y определяется по формуле

$$\mathbf{N(}\mathrm{X}\cup\mathrm{Y}\mathbf{)=N(X)+N(Y)-N(}\mathrm{X}\cap\mathrm{Y}\mathbf{).}$$

В самом деле, N(X)+N(Y) есть число элементов, которые мы получим, перечислив все элементы множества X, а затем – все элементы множества Y. Но в этом случае общие элементы (их число равно $N(\mathrm{X}\cap\mathrm{Y})$ будут перечислены дважды, то есть $N(\mathrm{X}\cup\mathrm{Y})+N(\mathrm{X}\cap\mathrm{Y})=$N(X)+N(Y), откуда и следует приведенная формула.

Справедлива следующая **теорема**: если $\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2,...,\mathrm{X}_n$ – произвольные множества, то

$$N(\mathrm{X}_1\cup\mathrm{X}_2\cup...\cup\mathrm{X}_n)=N(\mathrm{X}_1)+...+N(\mathrm{X}_n)-N(\mathrm{X}_1\cap\mathrm{X}_2)-...-N(X_{n-1}\cap\mathrm{X}_n)+$$
$$+N(\mathrm{X}_1\cap\mathrm{X}_2\cap\mathrm{X}_3)+...+N(\mathrm{X}_{n-2}\cap\mathrm{X}_{n-1}\cap\mathrm{X}_n)-...+(-1)^{n-1}N(\mathrm{X}_1\cap\mathrm{X}_2\cap\mathrm{X}_3)$$

(Эта формула доказывается методом математической индукции).

Метод подсчета по данной формуле, состоящий в поочередном сложении и вычитании, называется *методом включений и исключений.*

2. Для любых конечных множеств $\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2,.....,\mathrm{X}_n$ имеет место равенство

$$|\mathrm{X}_1\times\mathrm{X}_2\times...\times\mathrm{X}_n|=|\mathrm{X}_1|\cdot|\mathrm{X}_2|\cdot...\cdot|\mathrm{X}_n|,$$

которое называется *правилом произведения.*

Если $\mathrm{X}_1=\mathrm{X}_2=...=\mathrm{X}_n=\mathrm{X}$, то $\left|\mathrm{X}^n\right|=|\mathrm{X}|^n$.

Тема лекции «Свойства операций над множествами»

Свойства операций

Операции над множествами обладают определенными свойствами и удовлетворяют некоторым соотношениям. Рассмотрим следующие утверждения.

Утверждение. Для любых множеств *X, Y, Z* выполняются следующие тождества (основные свойства операций):

1. *Коммутативность* операций $\bigcup$ и $\bigcap$:

$$X\bigcup Y = Y\bigcup X,\ \ X\bigcap Y = Y\bigcap X.$$

2. *Ассоциативность* операций $\bigcup$ и $\bigcap$:

$$X\bigcup(Y\bigcup Z) = (X\bigcup Y)\bigcup Z,$$
$$X\bigcap(Y\bigcap Z) = (X\bigcap Y)\bigcap Z.$$

3. Законы *дистрибутивности*

$$X\bigcup(Y\bigcap Z) = (X\bigcup Y)\bigcap(X\bigcup Z),$$
$$X\bigcap(Y\bigcup Z) = (X\bigcap Y)\bigcup(X\bigcap Z).$$

4. $X\bigcup\varnothing = X,\ \ X\bigcap\varnothing = \varnothing$.

5. $X\bigcup U = U,\ \ X\bigcap U = X$.

6. Законы комплиментарности: $X\bigcup\overline{X} = U,\ \ X\bigcap\overline{X} = \varnothing$.

7. Законы идемпотентности: $X\bigcup X = X,\ \ X\bigcap X = X$.

8. Законы де Моргана: $\overline{X\bigcup Y} = \overline{X}\bigcap\overline{Y},\ \overline{X\bigcap Y} = \overline{X}\bigcup\overline{Y}$.

(Август де Морган (1806–1871) – английский математик).

9. Закон двойного отрицания $\overline{\overline{X}} = X$.

10. Законы поглощения

$$X\bigcup(X\bigcap Y) = X,\ \ X\bigcap(X\bigcup Y) = X.$$

Доказать свойства очень просто можно с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

Пример: Доказать любые два свойства с помощью диаграмм Эйлера-Венна

Утверждение: Следующие предложения о произвольных множествах попарно эквивалентны:

1) $X \subseteq Y$; 2) $X\bigcap Y = X$; 3) $X\bigcup Y = Y$; 4) $X \setminus Y = \varnothing$; 5) $\overline{X}\bigcup Y = U$.

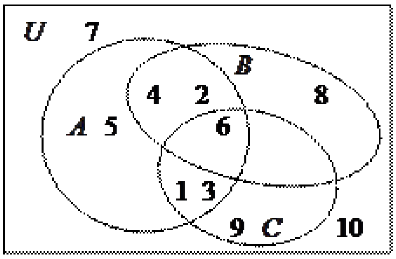
<u>*Замечание*</u>: Отметим, что операция $\setminus$ выражается через операции $\bigcap$ и $\bar{\ }$. По закону де Моргана и закону двойного отрицания справедливо соотношение $X\bigcup Y = \overline{\overline{X}\bigcap\overline{Y}}$, т. е. операция $\bigcup$ также выражается через операции $\bigcap$ и $\bar{\ }$. По определению операция $\oplus$ тоже выражается через $\bigcap$ и $\bar{\ }$. Таким образом, любая из определенных операций над множествами выражается через операции $\bigcap$ и $\bar{\ }$.

Тема лекции «Решение задач на выполнение операций над множествами»

Задача 1. Представить множества $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, $B = \{2,4,6,8\}$, $C = \{1,3,6,9\}$ на диаграмме Эйлера-Венна.

Решение. Поскольку множества A, B и C являются подмножествами множества U, выберем в качестве универсального множества множество U.

Диаграмма Эйлера-Венна выглядит следующим образом:



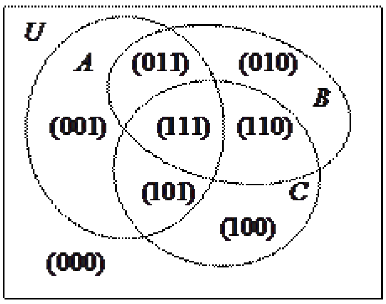
Задача 2. Записать характеристические функции множеств A, B и C (*задача 1*) в виде двоичных векторов. Пронумеровать каждую область диаграммы Эйлера-Венна двоичным номером.

Решение.

Так как универсальным множеством является множество U, содержащее 10 элементов, характеристические функции его подмножеств могут быть представлены десятимерными двоичными векторами. Последовательность координат таких векторов соответствуют последовательности элементов множества U. На каждом подмножестве координата вектора принимает значение 1, если элемент принадлежит подмножеству, и значение 0, если не принадлежит.

Следовательно,

$$
\begin{array}{lcllllllllll}
U & = & \{1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10\} \\
\mu_A & = & (1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0) \\
\mu_B & = & (0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0) \\
\mu_C & = & (1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0)
\end{array}
$$



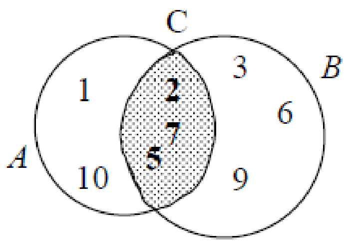
Двоичные номера областей на диаграмме Эйлера-Венна имеют 3 разряда по числу рассматриваемых множеств. Первый разряд соответствует множеству A: в нем ставится 1, если область содержит элементы множества A, и 0 – если не содержит. Второй разряд соответствует множеству B и третий – множеству C.

Задачи и упражнения:

Задача. Найти множество, являющееся пересечением множеств $A = \{1, 2, 5, 7, 10\}$ *и* $B = \{2, 3, 5, 6, 7, 9\}$, *и мощность найденного множества. Построить диаграммы Эйлера-Венна.*

Решение

По определению операции пересечения, искомое множество C будет состоять из тех и только тех элементов, которые принадлежат и множеству A и множеству B. То есть $C = A \cap B = \{2, 5, 7\}$. $m\ (C) = 3$.



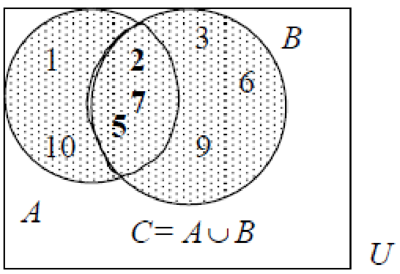
Ответ: $C = A \cap B = \{2, 5, 7\}$, $m\ (C) = 3$.

Задача. Найти множество, являющееся объединением множеств $A = \{1, 2, 5, 7, 10\}$ *и* $B = \{2, 3, 5, 6, 7, 9\}$, *и мощность найденного множества. Найти универсальное множество для множеств A и B. Построить диаграммы Эйлера-Венна.*

Решение

По определению операции объединения, искомое множество C будет состоять из тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству A или B. То есть $C = A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10\}$. $m\ (C) = 8$.

U – универсальное множество, то есть множество, объединяющее множества A и B. Например, это может быть множество первых 10 натуральных чисел, а именно $U = \{x \mid x \leq 10, \text{где } x \in N\}$.

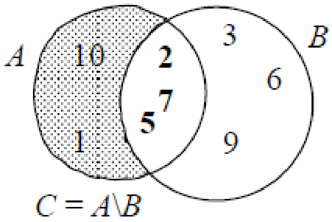


Ответ: $C = A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10\}$, $m\ (C) = 8$,
$U = \{x \mid x \leq 10, \text{где } x \in N\}$.

Задача. Найти множество, являющееся разностью множеств $A = \{1, 2, 5, 7, 10\}$ *и* $B = \{2, 3, 5, 6, 7, 9\}$, *и мощность найденного множества. Построить диаграммы Эйлера-Венна.*

Решение

По определению разности, искомое множество C будет состоять из тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству A и не принадлежат B. То есть $C = A \setminus B = \{1, 10\}$. $m(C) = 2$.



Ответ: $C = A \setminus B = \{1, 10\}$, $m(C) = 2$.

Задача. Даны множества $A = \{a, e, f, d, k, l\}$, $B = \{b, c, e, d, k, m\}$. *В результате какой операции над A и B получены множества* $C = \{a, b, c, d, e, f, f, k, l, m\}$, $D = \{$*все буквы латинского алфавита*$\}$, $E = \{b, c, m\}$, $F = \{e, d, k\}$, $G = \{a, f, l\}$?

Решение

Проанализируем, из каких элементов множеств A и B составлены множества C, D, E, F.

Во множество C включены элементы, принадлежащие и множеству A, и B, а также элементы, принадлежащие A и B одновременно, т. е. можно сказать, что к C отнесены элементы, принадлежащие множеству A или B. Исходя из определения операции объединения, приходим к выводу, что $C = A \cup B$.

Элементы множества A полностью содержатся во множестве D, элементы множества B полностью содержатся во множестве D, но не все элементы множества D являются элементами A и B. Следовательно, по определению строгого включения множеств $A \subset D$, $B \subset D$. Таким образом, по определению универсального множества D является универсальным множеством для A и B, как множество, объединяющее их.

Во множество E включены элементы, принадлежащие множеству B и не принадлежащие A. Исходя из определения разности множеств, приходим к выводу, что $E = B \setminus A$.

Во множество F включены элементы, принадлежащие множеству A и B одновременно. Исходя из определения операции пересечения, приходим к выводу, что $F = A \cap B$.

Во множество G включены элементы, принадлежащие множеству A и не принадлежащие B. Исходя из определения разности множеств, приходим к выводу, что $G = A \setminus B$.

Ответ: $C = A \cup B$, D – универсальное множество для A и B, $E = B \setminus A$, $F = A \cap B$, $G = A \setminus B$.

Задача. Доказать дистрибутивное свойство операции пересечения относительно объединения $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Доказательство

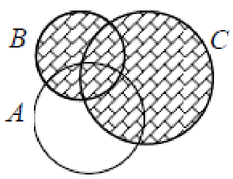
Существует два способа доказательства равенства множеств: аналитический и графический. Воспользуемся графическим способом, а именно, изобразим с помощью кругов Эйлера-Венна операции над множествами в левой и в правой частях равенства. Если полученные множества совпадают, то равенство верно, т. е. свойство доказано.

Таблица 11

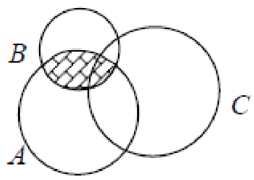
Графическое доказательство свойств множеств

Шаг | Левая часть равенства | Правая часть равенства

1.

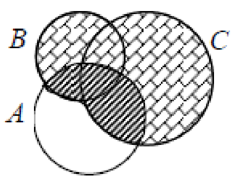


$B \cup C$

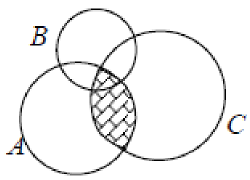


$A \cap B$

2.

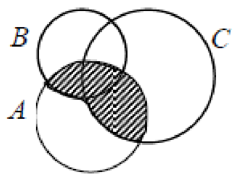


$A \cap (B \cup C)$



$A \cap C$

3.



$(A \cap B) \cup (A \cap C)$

Подсчет количества элементов в объединении, пересечении и разности конечных множеств

Задача. Известно, что в некотором информационном сообщении содержится 578 согласных букв и 234 гласных (в сообщении отсутствуют ь и ъ). Сколько всего букв в сообщении.

Решение

Известно, что множества гласных и согласных букв не пересекаются, следовательно, по правилу 1, в сообщении 578+234 = 812 букв.

Ответ: 812.

Задача. Множество А - студенты ЧГПУ; m(A) = 6000; В - преподаватели ЧГПУ; m(B)=340; С – непреподавательский состав ЧГПУ; m(C) = 110. Из скольких человек состоит коллектив ЧГПУ?

Решение

Данные множества попарно не пересекаются, поэтому по правилу 2
$m(A) + m(B) + m(C) = 6000 + 340 + 110 = 6450$.

Ответ: 6450.

Задача. А – абитуриенты, поступавшие в ЧГПУ в 2004 году. m(A) = 2000. В – студенты первокурсники ЧГПУ в 2004/2005 году, m(B) = 900. Сколько абитуриентов, не поступивших в 2004 году в ЧГПУ.

Решение

$B \subset A$, A/B – абитуриенты, не поступившие в ЧГПУ в 2004 году. По правилу 3 $m(A/B) = 2000\text{-}900 = 1100$.

Ответ: 1100.