ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ СИСТЕМЫ

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Иррациональные уравнения — это уравнения, содержащие неизвестное под знаком корня. Решение иррациональных уравнений следует начинать с нахождения области допустимых значений.

5

Решение уравнений вида $\sqrt{f(x)} = a$

АЛГОРИТМ

❶ Определить ОДЗ.

⇩

❷ Избавиться от корня, возведя в квадрат обе части уравнения.

⇩

❸ Записать ответ, учитывая ОДЗ.

Помни!
Уравнение $\sqrt{f(x)} = a$ не имеет решений, если $a < 0$. Так как $\sqrt{f(x)} \geq 0$ при любом x из ОДЗ.

ПРИМЕР

Решить уравнение: $\sqrt{x+3} = 6$.

Решение.

① ОДЗ: $x + 3 \geq 0$; $x \geq -3$; $x \in [-3; +\infty)$.

② Избавляемся от корня, возведя в квадрат обе части уравнения.

$\left(\sqrt{x+3}\right)^2 = 6^2$; $x + 3 = 36$; $x = 36 - 3$; $x = 33$;

$33 \in [-3; +\infty)$.

③ ***Ответ***: 33.

Решение уравнений вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$

6

АЛГОРИТМ

❶ Определить ОДЗ.

⇩

❷ Определить значения *x*, при которых равенство может выполниться, т. е. $g(x) \geq 0$.

⇩

❸ Возвести в квадрат обе части данного уравнения и решить полученное уравнение.

⇩

❹ Записать ответ, учитывая п. 1 и п. 2.

Помни!
Уравнение $\sqrt{f(x)} = g(x)$ не имеет решений, если $g(x) < 0$, так как $\sqrt{f(x)} \geq 0$ при любом x из ОДЗ.

ПРИМЕР

Решить уравнение: $\sqrt{x+3} = x - 6$.

Решение.

① ОДЗ: $x + 3 \geq 0$; $x \geq -3$; $x \in [-3; +\infty)$.

② Равенство выполняется при условии, что и правая часть уравнения $x - 6 \geq 0$, т. е. $x \geq 6$, $x \in [6; +\infty)$. Таким образом, корни заданного уравнения ищем на промежутке $x \in [6; +\infty)$.

③ $\left(\sqrt{x+3}\right)^2 = (x-6)^2$; $x + 3 = x^2 - 12x + 36$;

$x^2 - 13x - 33 = 0$.

$D = (-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-33) = 169 + 132 = 301$;

$$x_1 = \frac{13 + \sqrt{301}}{2 \cdot 1} = \frac{13 + \sqrt{301}}{2} \approx \frac{13 + 17,3}{2} \approx 15,15;$$

$$x_2 = \frac{13 - \sqrt{301}}{2} \approx 2,15; \ \frac{13 - \sqrt{301}}{2} \notin [6; +\infty).$$

④ ***Ответ***: $x = \dfrac{13 + \sqrt{301}}{2}$.

7 Решение уравнений вида $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$

АЛГОРИТМ

❶ **Определить ОДЗ.**

⇩

❷ **Возвести в квадрат обе части данного уравнения и решить полученное уравнение.**

⇩

❸ **Записать ответ, учитывая ОДЗ.**

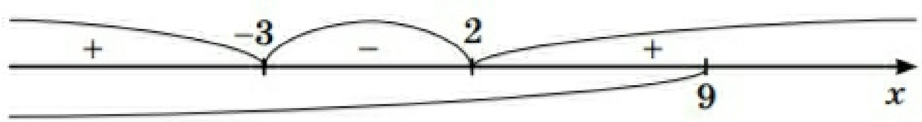
ПРИМЕР

Решить уравнение: $\sqrt{x^2 + x - 6} = \sqrt{9 - x}$.

Решение.

① ОДЗ:

$x^2 + x - 6 \geq 0$	$9 - x \geq 0$
$x^2 + x - 6 = 0$	$-x \geq -9$
$x_1 = -3;\ x_2 = 2$	$x \leq 9$



$x \in (-\infty; -3] \cup [2; 9]$.

② $\left(\sqrt{x^2 + x - 6}\right)^2 = \left(\sqrt{9 - x}\right)^2$;

$x^2 + x - 6 = 9 - x$;

$x^2 + 2x - 15 = 0;\ x_1 = -5;\ x_2 = 3$.

③ ***Ответ***: $-5;\ 3$.

Решение уравнений вида $\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} = a$

8

АЛГОРИТМ

1. **Преобразовать уравнение к виду $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} + a$.**
2. **Определить ОДЗ.**
3. **Определить значения x, при которых может быть выполнено равенство из п. 1., т. е. $\sqrt{g(x)} + a \ge 0$.**
4. **Возвести в квадрат обе части равенства и решить полученное уравнение.**
5. **Записать ответ, учитывая п. 2 и п. 3.**

ПРИМЕР

Решить уравнение: $\sqrt{x+8} - \sqrt{x-5} = 3$.

Решение.

① $\sqrt{x+8} = \sqrt{x-5} + 3$.

② ОДЗ: $x + 8 \ge 0$; $x \ge -8$ и $x - 5 \ge 0$; $x \ge 5$; $x \in [5; +\infty)$.

③ Равенство выполняется при условии $\sqrt{x-5} + 3 \ge 0$. (Так как $\sqrt{x-5} \ge 0$ и $3 > 0$, то правая часть уравнения не принимает отрицательных значений.)

④ $\left(\sqrt{x+8}\right)^2 = \left(\sqrt{x-5} + 3\right)^2$; $x + 8 = x - 5 + 6\sqrt{x-5} + 9$; $6\sqrt{x-5} = x + 8 - x - 4$; $6\sqrt{x-5} = 4$; $3\sqrt{x-5} = 2$; $\left(3\sqrt{x-5}\right)^2 = 2^2$; $9(x-5) = 4$; $x - 5 = \frac{4}{9}$; $x = 5\frac{4}{9}$.

⑤ ***Ответ***: $5\frac{4}{9}$.

9 Решение уравнений вида $\sqrt{f(x)} - a\sqrt{g(x)} = 0$ способом введения новой переменной

АЛГОРИТМ

1. **Определить ОДЗ.**
2. **Ввести новую переменную $t = \sqrt{g(x)}$, тогда $t \geq 0$.**
3. **Преобразовать исходное уравнение и подставить t. Решить полученное уравнение.**
4. **Подставляя полученные решения из п. 3 в п. 2, найти значения x.**
5. **Записать в ответ значения x из п. 4, учитывая ОДЗ.**

ПРИМЕР

Решить уравнение: $x - 4 - 2\sqrt{x-1} = 0$.

Решение.

Уравнение $x - 4 - 2\sqrt{x-1} = 0$ решают с помощью введения новой переменной.

① ОДЗ: $x - 1 \geq 0$, $x \geq 1$.

② Пусть $t = \sqrt{x-1}$, $t \geq 0$.

③ $(x - 1) - 2\sqrt{x-1} - 3 = 0$; $t^2 - 2t - 3 = 0$; $t_1 = 3$; $t_2 = -1$.

④ Так как $-1 \not\geq 0$, то $\sqrt{x-1} = 3$; $x - 1 = 9$; $x = 10$. Учитывая ОДЗ, видим, что 10 — корень уравнения.

⑤ ***Ответ***: 10.

ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

Решить уравнение:

1) $\sqrt{2x-1} = -2$;

2) $\sqrt{2x-1} = 0$;

3) $\sqrt{2x-1} = 5$;

4) $\sqrt[3]{2x-1} = -2$;

5) $\sqrt{2x-1} = 3 - x$;

6) $\sqrt{x-3} = \sqrt{5-x}$;

7) $\sqrt{x+6} - \sqrt{x^2 - x + 6} = x$.