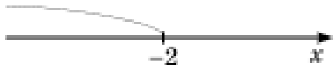
ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

ПРОСТЕЙШИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Простейшие показательные неравенства вида $a^x > a^y$ решают, используя свойства показательной функции ($y = a^x$). Так как при $0 < a < 1$ функция убывает на всей области определения, а при $a > 1$ — возрастает, то получим:

при $0 < a < 1$, $x < y$

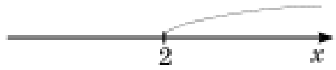
$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > 4; \left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}; x < -2.$$



$x \in (-\infty; -2)$

при $a > 1$, $x > y$

$$2^x > 4; 2^x > 2^2; x > 2.$$



$x \in (2; +\infty)$

ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

Решить уравнение:

1) $3^x \le 243$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \ge 64$; 3) $7^x \le \frac{1}{49}$; 4) $2^{x+1} \ge 64$.

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА, НЕ ЯВЛЯЮЩИЕСЯ ПРОСТЕЙШИМИ

Решение показательных неравенств методом приведения к одному основанию ($a^x \ge b$, $a^{f(x)} > b$)

26

АЛГОРИТМ

1. Определить ОДЗ.
2. Представить правую часть неравенства в виде степени с основанием a.
3. Пользуясь свойствами показательной функции, перейти от неравенства $a^x > a^b$ к неравенству $x > b$ (если $a > 1$) или $x < b$ (если $0 < a < 1$).
4. Записать ответ, учитывая ОДЗ.

ПРИМЕР

Решить неравенство: $2^{\frac{2x-5}{x+5}} \geq 16$.

Решение.

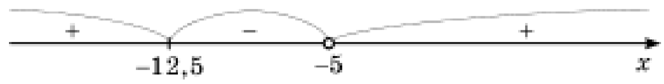
① ОДЗ: $x + 5 \neq 0$; $x \neq -5$.

② $2^{\frac{2x-5}{x+5}} \geq 2^4$.

③ $\frac{2x-5}{x+5} \geq 4$; $\frac{2x-5}{x+5} - 4 \geq 0$; $\frac{2x-5-4x-20}{x+5} \geq 0$;

$\frac{-2x-25}{x+5} \geq 0$; $\frac{2x+25}{x+5} \leq 0$; $\frac{2x+25}{x+5} = 0$.

$2x + 25 = 0$; $2x = -25$; $x = -12{,}5$; $x + 5 \neq 0$; $x \neq -5$.



$x \in [-12{,}5; -5)$.

④ ***Ответ***: $x \in [-12{,}5; -5)$.

27 Решение показательных неравенств, приводимых к квадратным, способом подстановки

АЛГОРИТМ

❶ **Пользуясь свойствами степени, привести неравенство к виду $ma^{2x} + na^x + l > 0$.**

⇩

❷ **Ввести новую переменную $t = a^x$, где $t > 0$.**

⇩

❸ **Решить квадратное неравенство относительно t.**

⇩

❹ **Выполнить обратную замену переменной и решить неравенство относительно переменной x.**

⇩

❺ **Записать ответ.**

ПРИМЕР

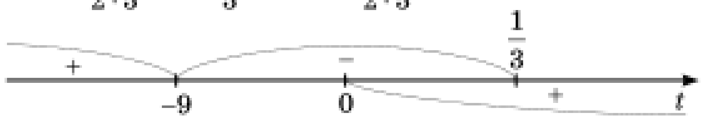
Решить неравенство: $3^{2x+1} + 26 \cdot 3^x - 9 > 0$.

Решение.

① $3 \cdot 3^{2x} + 26 \cdot 3^x - 9 > 0$.

② Пусть $3^x = t$, $t > 0$.
Тогда $3t^2 + 26t - 9 > 0$; $3t^2 + 26t - 9 = 0$.
$D = 26^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-9) = 676 + 108 = 784$;

③ $t_1 = \dfrac{-26 + \sqrt{784}}{2 \cdot 3} = \dfrac{1}{3}$; $t_2 = \dfrac{-26 - \sqrt{784}}{2 \cdot 3} = -9$.



④ $t > \dfrac{1}{3}$; $3^x > \dfrac{1}{3}$; $3^x > 3^{-1}$; $x > -1$.

⑤ ***Ответ***: $x \in (-1; +\infty)$.

28 Решение показательных неравенств вида $ma^{2x} + na^x b^x + lb^{2x} > 0$

АЛГОРИТМ

❶ **Преобразовать данное неравенство, выделив выражения a^x и b^x.**

⇩

❷ **Выполнить деление неравенства на b^{2x}.**

⇩

❸ **Ввести переменную $t = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$, где $t > 0$.**

⇩

❹ **Решить полученное квадратное неравенство относительно t.**

⇩

❺ **Выполнить обратную замену переменной и решить полученные неравенства относительно x.**

⇩

❻ **Записать ответ, учитывая ОДЗ.**

ПРИМЕР

Решить неравенство: $9 \cdot 4^x - 13 \cdot 6^x + 4 \cdot 9^x \geq 0$.

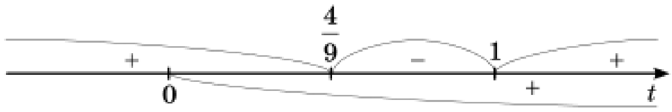
Решение.

① $9 \cdot 2^{2x} - 13 \cdot 2^x \cdot 3^x + 4 \cdot 3^{2x} \geq 0$.

② Так как $3^{2x} > 0$, то при делении неравенства на 3^{2x} получим: $9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 13 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 4 \geq 0$.

③ Пусть $t = \left(\frac{2}{3}\right)^x$, $t > 0$.

④ $9t^2 - 13t + 4 \geq 0$; $9t^2 - 13t + 4 = 0$;
$D = (-13)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 169 - 144 = 25$;
$t_1 = \frac{13 + \sqrt{25}}{2 \cdot 9} = 1$; $t_2 = \frac{13 - \sqrt{25}}{2 \cdot 9} = \frac{4}{9}$.



⑤ $0 < t \leq \frac{4}{9}$ и $t \geq 1$.

$\left(\frac{2}{3}\right)^x \leq \frac{4}{9}$; $\qquad \left(\frac{2}{3}\right)^x \geq 1$;

$\left(\frac{2}{3}\right)^x \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2$. $\qquad \left(\frac{2}{3}\right)^x \geq \left(\frac{2}{3}\right)^0$.

$x \geq 2$. $\qquad x \leq 0$.

⑥ ***Ответ***: $x \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$.

Обрати внимание!
При решении показательных неравенств, не являющихся простейшими, используют методы решения показательных уравнений.

Решение показательных неравенств вида $an^{f(x)} + bn^{g(x)} > c$

29

АЛГОРИТМ

❶ Пользуясь свойствами степени, привести неравенство к одному основанию с одинаковыми показателями степени.

❷ Упростить и решить полученное неравенство.

❸ Записать ответ.

ПРИМЕР

Решить неравенство: $5^{x+1} + 2 \cdot 5^{x+2} \geq 11$.

Решение.

① $5^x \cdot 5 + 2 \cdot 5^x \cdot 5^2 \geq 11$.

② $5^x \cdot (5 + 50) \geq 11$; $5^x \geq \frac{11}{55}$; $5^x \geq \frac{1}{5}$; $5^x \geq 5^{-1}$; $x \geq -1$.

③ ***Ответ***: $x \in [-1; +\infty)$.

ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

Решить неравенство:

1) $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2+3x+25} < \left(\frac{1}{7}\right)^{-15}$;

2) $2^{\frac{12}{7-x}} > 2^x$;

3) $4^x - 3 \cdot 2^{x+2} + 32 \leq 0$;

4) $27 \cdot 4^x - 6^{x+1} - 8 \cdot 9^x > 0$;

5) $6 \cdot 4^{x+1} + 3 \cdot 4^x < 108$.