

Показательные уравнения

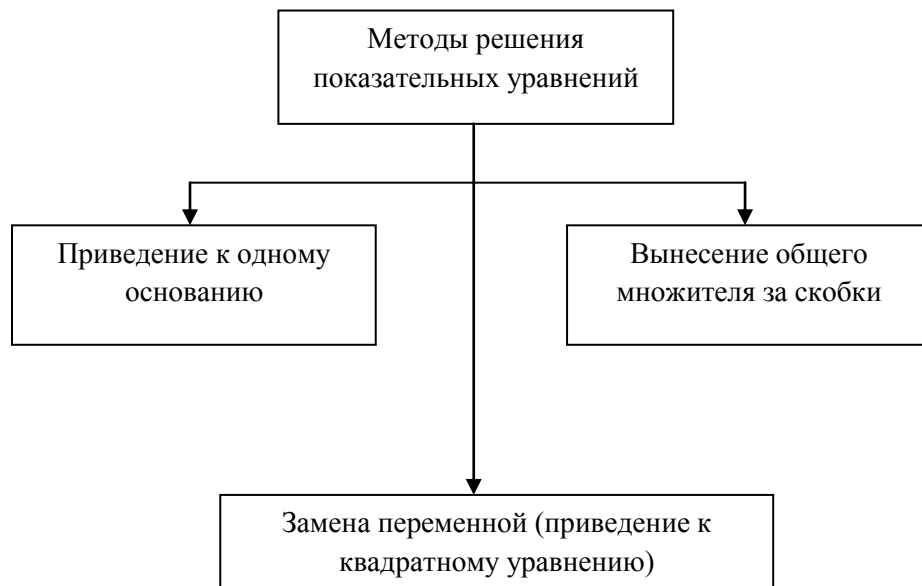
Основная часть.

Определение: уравнение, которое содержит неизвестное в показателе степени, называют показательным уравнением.

Простейшее показательное уравнение имеет вид $a^x = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$

Если $b < 0$, то уравнение $a^x = b$ не имеет решения.

Рассмотрим основные методы решения показательных уравнений



На конкретных примерах рассмотрим суть каждого метода.

Решение показательных уравнений основывается на свойствах показательной функции.

1. Приведение обеих частей уравнений к одному и тому же основанию.

Этот метод основан на следующей теореме:

Если $a > 0$ и $a \neq 1$, то уравнения $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ и $f(x) = g(x)$ равносильны.

Равенство показателей степени при равных основаниях обусловлено свойством показательной функции, а именно ее монотонностью. Это означает, что каждое свое значение функция приобретает при единственном значении аргумента.

$$3^x = 27 \cdot \sqrt[4]{9}$$

каждую часть уравнения представим в виде степени с основанием 3

$$3^x = 3^3 \cdot 3^{1/2}$$

$$3^x = 3^{3,5}$$

Т.к. основания равны, то приравниваем и показатели

$$x = 3,5$$

Ответ: $x=3,5$

2. Замена переменной.

$$9^x - 4 \cdot 3^x - 45 = 0$$

Т.к $9^x = (3^2)^x$, тогда получим уравнение вида:

$$(3^2)^x - 4 \cdot 3^x - 45 = 0$$

Замена: $3^x = y$, $y > 0$

$$y^2 - 4y - 45 = 0$$

$$D=196$$

$$y_1 = -5 \text{ (не удовл. условию } y > 0 \text{)}$$

$$y_2 = 9$$

$$3^x = 9$$

$$3^x = 3^2$$

$$x=2$$

Ответ: $x=2$

3. Вынесение общего множителя за скобки.

$$3^{x+1} - 2 \cdot 3^x = 9$$

$$3^x \cdot 3 - 2 \cdot 3^x = 9$$

Вынесем за скобки общий множитель с наименьшим показателем 3^x

$$3^x(3-2)=9$$

$$3^x \cdot 1 = 9$$

$$3^x = 9$$

$$3^x = 3^2$$

$$x=2$$

Ответ: $x=2$.

Выберете один из методов, и составьте для него алгоритм решения.

Первичное закрепление изученного материала.

М. В. Ломоносов говорил «Теория без практики мертва и бесплодна, практика без теории невозможна и пагубна. Для теории нужны знания, для практики сверх того, и умения».

И вот теперь вы должны проявить свои умения при решении различных показательных уравнений.

1) Определить метод решения показательных уравнений и решить в тетради.

$$1. 3^{x^2-9x+20} = 1$$

$$2. 3^{x-1} - 3^x + 3^{x+1} = 63$$

$$3. 7^{2x} - 6 \cdot 7^x - 7 = 0$$

Решения:

$$1. 3^{x^2-9x+20} = 1$$

$$3^{x^2-9x+20} = 3^0$$

Так как $3 > 0$ и $3 \neq 1$, то

$$x^2 - 9x + 20 = 0$$

$$x_1 = 4, x_2 = 5.$$

Ответ: $x_1 = 4, x_2 = 5$.

$$2. 3^{x-1} - 3^x + 3^{x+1} = 72$$

Выносим общий множитель за скобки:

$$3^{x-1}(1 - 3 + 9) = 63$$

$$3^x \cdot 7 = 63$$

$$3^x = 9$$

$$3^x = 3^2$$

$$x = 2$$

Ответ: $x = 2$.

$$3. 7^{2x} - 6 \cdot 7^x - 7 = 0$$

Введем новую переменную $y = 7^x$

$$\text{Получаем: } y^2 - 6y - 7 = 0$$

$$D = 64$$

$$y_1 = -1 \quad y_2 = 7$$

Переходим к замене:

$$7^x = -1 - \text{не имеет решения}$$

$$7^x = 7$$

$$x = 1$$

Ответ: $x = 1$

2) Внимательно проанализируйте ход решения уравнения и найдите ошибки и исправьте. Сделать записи в тетради.

$$1.64^x - 8^x - 56 = 0$$

$$(8^2)^x - 8^x - 56 = 0;$$

$$8^x = y;$$

$$y^2 - y - 56 = 0;$$

$$D = 1 - 4 \cdot (-56) = 1 + 224 = 225 = 15^2.$$

$$y_{1,2} = \frac{1 \pm 15}{2};$$

$$y_1 = -7; y_2 = 8$$

$$8^x = -7; \quad 8^x = 8^1;$$

$$x = \frac{-7}{8} \quad x = 1$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{-7}{8}, x = 1.$$

$$5^{x-3} = -5$$

$$x-3 = -1$$

$$x=3-1$$

$$x=2$$

$$\text{Ответ: } x=2$$

3) Заполните пропуски при решении данного уравнения в тетради.

$$5 \cdot 5^{2-4x} = 25^{x+3}$$

Решение:

$$5^{\dots} = \dots 2^{(x+3)}$$

$$\dots 3-4x = 5^{2x+6}$$

$$3 - 4x = \dots$$

$$\dots - 2x = 6 - \dots$$

$$-6x = \dots$$

$$x = 3; \dots$$

$$x = \dots$$

Ответ: - 0,5.

$$(6,01)^{x^2+2x} = 1$$

Решение:

$$(6,01)^{x^2+2x} = (6,01)^{\dots};$$

$$\dots = 0;$$

$$\dots \cdot (x + \dots) = 0;$$

$$x = 0 \quad \text{или} \quad \dots = 0 ;$$

$$x = - 2;$$

Ответ: 0 и -2.