

Логарифм. Свойства логарифмов.

Глоссарий по теме

Логарифмом положительного числа b по основанию a , $a > 0, a \neq 1$ называется показатель степени, в которую надо возвести a , чтобы получить b .

$$\log_a b = c \Leftrightarrow 1) b > 0 \quad 2) a > 0, a \neq 1 \quad 3) a^c = b$$

Логарифмирование – это действие нахождения логарифма числа.

Основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a b} = b$, где $b > 0, a > 0, a \neq 1$

Свойства логарифмов. При $b > 0, c > 0, a > 0, a \neq 1$ справедливы равенства:

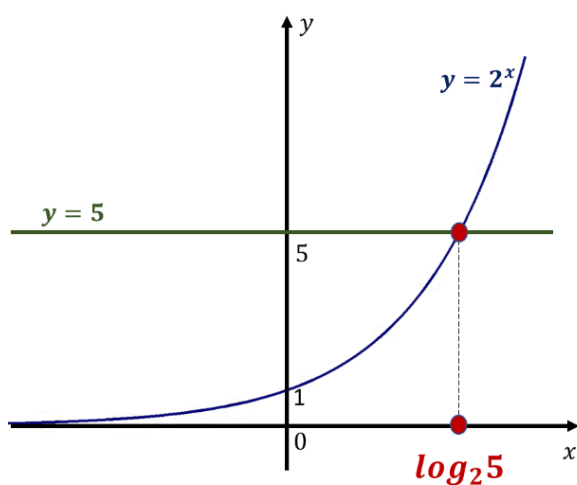
- логарифм произведения: $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$;

- логарифм частного: $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$;

- логарифм степени: $\log_a b^r = r \cdot \log_a b$.

Теоретический материал для самостоятельного изучения

При решении простейших показательных уравнений не всегда можно найти точный ответ. Например, уравнение $2^x = 32$ имеет корень 5, т. к. $32 = 2^5$, значит $2^x = 2^5$, $x = 5$. В уравнении $2^x = 5$ число 5 не является степенью 2, значит предыдущий способ решения не подходит. Нам известно, что уравнение имеет единственный корень. Посмотрим это на графике.



Абсцисса точки пересечения – единственное решение данного уравнения. Это число и называют логарифмом 5 по основанию 2.

Дадим определение логарифма.

Логарифмом положительного числа b по основанию a , $a > 0, a \neq 1$ называется показатель степени, в которую надо возвести a , чтобы получить b .

$$\log_a b = c \Leftrightarrow 1) b > 0 \quad 2) a > 0, a \neq 1 \quad 3) a^c = b$$

Т. е. логарифм числа b по основанию a , $b > 0, a > 0, a \neq 1$, есть некоторое число c , такое, что $a^c = b$.

Пример 1.

$\log_6 216 = 3$, т. к. выполнены все условия определения:

1) $216 > 0$; 2) $6 > 0, 6 \neq 1$; 3) $6^3 = 216$.

Пример 2.

$\log_2 \frac{1}{8} = -3$, т. к. выполнены все условия определения:

1) $\frac{1}{8} > 0$; 2) $2 > 0, 2 \neq 1$; 3) $2^{-3} = \frac{1}{8}$.

Это действие называется логарифмированием.

Логарифмирование – это действие нахождения логарифма числа.

Существует краткая запись определения логарифма: $a^{\log_a b} = b$, где $b > 0, a > 0, a \neq 1$

так называемое **основное логарифмическое тождество**. Его используют при вычислениях.

Пример 3.

$4^{\log_4 5} = 5$ (Читают: 4 в степени логарифм 5 по основанию 4 равен 5)

Пример 4.

$\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} 6} = 6$ (Читают: одна треть в степени логарифм 6 по основанию одна треть равен 6)

Решим несколько задач с использованием определения логарифма.

Задача 1. Вычислить $\log_{27} 81$.

Решение. Пусть $\log_{27} 81 = x$, тогда по определению логарифма $27^x = 81$. Приведем левую и правую части к одному основанию. $27 = 3^3$, $81 = 3^4$, значит $3^{3x} = 3^4$. Отсюда следует, что $3x = 4$; $x = \frac{4}{3}$.

Задача 2. Вычислить $3^{-2\log_3 5}$.

Решение. Для вычисления воспользуемся свойствами степеней: 1) $(a^n)^m = a^{nm}$, 2) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ и основным логарифмическим тождеством: $a^{\log_a b} = b$.

$$3^{-2\log_3 5} = (3^{\log_3 5})^{-2} = 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}.$$

Для решения более сложных задач потребуются знание свойств логарифмов. Рассмотрим их.

1. Логарифм произведения.

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$$

Логарифм произведения чисел b и c по основанию a равен сумме логарифма b по основанию a и логарифма c по основанию a .

Пример 5.

$$\log_8 2 + \log_8 32 = \log_8 (2 \cdot 32) = \log_8 64 = 2$$

2. Логарифм частного.

$$\log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c$$

Логарифм частного чисел b и c по основанию a равен разности логарифма b по основанию a и логарифма c по основанию a .

Пример 6.

$$\log_{13} 26 - \log_{13} 2 = \log_{13} \left(\frac{26}{2} \right) = \log_{13} 13 = 1$$

3. Логарифм степени.

$$\log_a b^r = r \cdot \log_a b$$

Логарифм числа b в степени r по основанию a равен произведению показателя r и логарифма b по основанию a .

Пример 7.

$$\log_5 5^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log_5 5 = \frac{1}{3}$$

Важно! Свойства выполняются при $b > 0, c > 0, a > 0, a \neq 1$.

Примеры и разбор решения заданий тренировочного модуля

№ 1. Вычислите: $\log_{15} \sqrt[3]{225}$.

Решение:

Чтобы выполнить это задание нам понадобятся следующие определения и свойства:

1. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$;
2. $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$;
3. $\log_a b^r = r \cdot \log_a b$.

Представим $\sqrt[3]{225}$ в виде степени с рациональным показателем: $\sqrt[3]{225} = 225^{\frac{1}{3}}$. Далее воспользуемся свойством нахождения логарифма

степени: $\log_{15} \sqrt[3]{225} = \log_{15} 225^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log_{15} 225$. Вспоминаем таблицу

квадратов: $225 = 15^2$, значит $\log_{15} 225 = 2$, $\frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}$. Ответ: $\frac{2}{3}$.

№ 2. Вычислите

1. $(2^{\log_2 15} + 3)^{\log_{15} 28} : \log_2 128$
2. $(\log_{37} 5 + \log_{37} 7,4 - 4^{\log_2 5}) : \log_{\frac{1}{3}} 81$
3. $\frac{\log_{0,7} 64}{\log_{0,7} 22 - \log_{0,7} 44}$
4. $\log_2 (\log_3 \sqrt[4]{3})$

Решение:

Чтобы выполнить это задание нам понадобятся следующие определения и свойства:

1. $a^{\log_a b} = b$;
2. $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$;

$$3. \log_a b - \log_a c = \log_a \left(\frac{b}{c} \right);$$

$$4. \sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{4}}.$$

$$5. (2^{\log_2 15} + 3)^{\log_{18} 28} : \log_2 128 = (15 + 3)^{\log_{18} 28} : \log_2 128 = 18^{\log_{18} 28} : \log_2 128 = 28 : \log_2 128 = 28 : \log_2 2^7 = 28 : 7 = 4.$$

$$6. (\log_{37} 5 + \log_{37} 7,4 - 4^{\log_2 5}) : \log_{\frac{1}{3}} 81 =$$

$$= (\log_{37} (5 \cdot 7,4) - 4^{\log_2 5}) : \log_{\frac{1}{3}} 81 =$$

$$= (\log_{37} 37 - 2^{2 \log_2 5}) : \log_{\frac{1}{3}} 3^4 =$$

$$= (1 - (2^{\log_2 5})^2) : \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3} \right)^{-4} = (1 - 5^2) : (-4) = -24 : (-4) = 6.$$

$$1. \frac{\log_{0,7} 64}{\log_{0,7} 22 - \log_{0,7} 44} = \frac{\log_{0,7} 2^6}{\log_{0,7} \left(\frac{22}{44} \right)} = \frac{6 \log_{0,7} 2}{\log_{0,7} \left(\frac{1}{2} \right)} = \frac{6 \log_{0,7} 2}{\log_{0,7} (2)^{-1}} = \frac{6 \log_{0,7} 2}{-1 \cdot \log_{0,7} 2} = -6.$$

$$2. \log_2 (\log_3 \sqrt[4]{3}) = \log_2 \left(\log_3 3^{\frac{1}{4}} \right) = \log_2 \frac{1}{16} = \log_2 2^{-4} = -4.$$